

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ - 14.02.2026**

Clasa a XII – a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1 (20 de puncte)

Pe mulțimea $G = (2, +\infty) - \{3\}$ se definește legea $x * y = (x - 2)^{\frac{1}{2} \ln(y-2)} + 2$, $(\forall) x, y \in G$.

a) Determinați $x \in G$ pentru care $x * (e^6 + 2) = 10$.

b) Rezolvați în G ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = x$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Soluție:

a) $x * (e^6 + 2) = 10 \Leftrightarrow (x - 2)^{\frac{1}{2} \ln(e^6 + 2 - 2)} + 2 = 10 \Leftrightarrow (x - 2)^3 = 8$ 6p
 $x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$ 4p

b) Legea „*” este asociativă 1p

Demonstrația, prin inducție matematică a compunerii

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 2)^{\left[\frac{1}{2} \ln(x-2)\right]^{n-1}} + 2, (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$
 2p

$$(x - 2)^{\left[\frac{1}{2} \ln(x-2)\right]^{n-1}} + 2 = x \Leftrightarrow (x - 2)^{\left[\frac{1}{2} \ln(x-2)\right]^{n-1}} = x - 2$$
 2p

Deoarece $x - 2 > 0, x - 2 \neq 1$ rezultă $[\ln(x - 2)]^{n-1} = 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ 1p

Dacă n este număr par atunci $\ln(x - 2) = 2 \Rightarrow x = e^2 + 2 \in G$ 2p

Dacă n este număr impar atunci $\ln(x - 2) = \pm 2 \Rightarrow x = e^2 + 2 \in G$ sau $x = e^{-2} + 2 \in G$ 2p

Problema 2 (20 de puncte)

Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x}$.

a) Calculați $\int_1^2 x^3 f(x^2) dx$.

b) Demonstrați că $\int_1^e f(x) dx + \int_1^e e^x \ln x dx = e^e$.

Soluție:

a) $\int_1^2 x^3 f(x^2) dx = \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 2x e^{x^2} dx =$ 6p
 $= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (e^4 - e)$ 4p

b) $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{e^x}{x} dx = \int_1^e e^x \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^e e^x \cdot (\ln x)' dx =$ 4p

$$= e^x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e e^x \cdot \ln x dx = e^e \ln e - \int_1^e e^x \cdot \ln x dx = e^e - \int_1^e e^x \cdot \ln x dx$$
 4p

$$\int_1^e f(x) dx + \int_1^e e^x \ln x dx = e^e$$
 2p

Problema 3 (20 de puncte)

Se consideră funcțiile $F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F_n(x) = \int_0^x t^n \cdot \sin t \, dt$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că $F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} [F_n(1)]$.

Soluție:

$$\text{a) } F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \sin t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot (-\cos t)' \, dt = -t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \quad 6p$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \cos 0 + \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1. \quad 4p$$

$$\text{b) } 0 \leq \sin t \leq t, (\forall) t \in [0,1] \Rightarrow \quad 4p$$

$$0 \leq t^n \sin t \leq t^{n+1}, (\forall) t \in [0,1] \quad 2p$$

$$\text{Integrând obținem } 0 \leq F_n(1) \leq \frac{t^{n+2}}{n+2} \Big|_0^1 \Rightarrow 0 \leq F_n(1) \leq \frac{1}{n+2} \quad 2p$$

$$\text{Cum } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0 \text{ atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(1) = 0. \quad 2p$$

Problema 4 (30 de puncte)

Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$ definim legea de compoziție $f_1 \circ f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - 3}, (\forall) f_1, f_2 \in G$.

Două lentile având distanțele focale f_1 și f_2 sunt situate la distanța 3 u. m. una față de cealaltă.

În această situație, distanța focală f a sistemului este definită prin $f = f_1 \circ f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - 3}$.

a) Să se demonstreze că legea de compoziție este asociativă.

b) Verificați dacă se poate așeza o lentilă care să nu influențeze distanța focală a sistemului.

c) Determinați $d \in G$ cu proprietatea $f \circ d = d \circ f = d, (\forall) f \in G$.

Soluție:

a) Demonstrarea asociativității. 10p

b) Folosirea definiției elementului neutru 5p

Precizarea inexistenței elementului neutru. 5p

c) $f \circ d = d \circ f, (\forall) f \in G$ 2p

$f \circ d = d, (\forall) f \in G$ atunci $d = 3$. 8p